Řešení úloh 1. kola 48. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

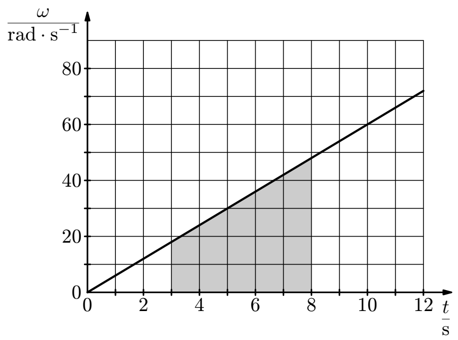
Autoři úloh: J. Jírů (1, 3, 4, 7), I. Čáp (5), I. Volf (2), J. Jírů a P. Šedivý (6)

1. a) Jestliže kolo automobilu neprokluzuje, je velikost okamžité rychlosti automobilu rovna velikosti obvodové rychlosti libovolného bodu kola ve vzdálenosti r od osy otáčení. Pro výpočet hodnot okamžité rychlosti automobilu, okamžité úhlové rychlosti kola, uražené dráhy a úhlu otočení ve vybraných časech použijeme vzorce

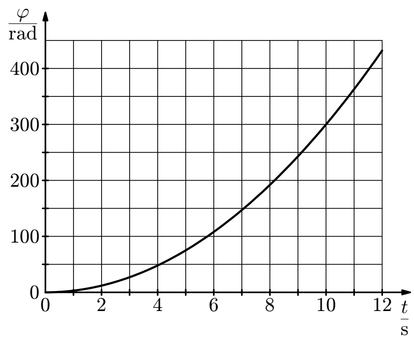
$$v = at\,, \quad \omega = \frac{v}{r}\,, \quad s = \frac{1}{2}at^2\,, \quad \varphi = \frac{s}{r}\,, \quad \text{kde} \quad a = \frac{v_1}{t_1} = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

Hodnoty zapíšeme do tabulky a sestrojíme grafy:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	2	4	6	8	10	12
$\frac{v}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$	0	3	6	9	12	15	18
$\frac{\omega}{\mathrm{rad \cdot s^{-1}}}$	0	12	24	36	48	60	72
$\frac{s}{\mathrm{m}}$	0	3	12	27	48	75	108
$\frac{\varphi}{\mathrm{rad}}$	0	12	48	108	192	300	432



Obr. R1



Obr. R2

6 bodů

b) Obsah plochy pod grafem je $\dfrac{18\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} + 48\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}}{2} \cdot 5\ \mathrm{s} = 165\ \mathrm{rad}$. Obsah udává úhel otočení kola automobilu v časovém intervalu od 3 s do 8 s.

2 body

c) Z grafu např. vyčteme, že za 10 s pohybu od jeho počátku se úhlové rychlost zvětšila z nulové hodnoty na $60\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Směrnice přímky je

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{60\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{10\ \text{s}} = 6\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}\,.$$

Fyzikální význam této veličiny je změna úhlové rychlosti za jednotku času, v našem případě se úhlová rychlost za každou sekundu rovnoměrně zvětšila o $6\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

2 body

Poznámka: Veličina $\varepsilon = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ *se nazývá úhlové zrychlení.*

2. Označme $v_1 = 60\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, $v_2 = 50\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, t_1, t_2 doby brzdění, s_1, s_2 brzdné dráhy.

a) Z rovnic $Ft_1 = mv_1,\ Ft_2 = mv_2$ plyne $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{v_2}{v_1}$. Hledaný poměr je

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1} = 1 - \frac{t_2}{t_1} = 1 - \frac{50}{60} = \frac{1}{6} = 16{,}7\ \%\,.$$

2 body

b) Z rovnic $Fs_1 = \dfrac{1}{2}mv_1^2,\ Fs_2 = \dfrac{1}{2}mv_2^2$ plyne $\dfrac{s_2}{s_1} = \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2$.

Hledaný poměr je

$$\frac{s_1 - s_2}{s_1} = 1 - \frac{s_2}{s_1} = 1 - \left(\frac{50}{60}\right)^2 = \frac{11}{36} = 30{,}6\ \%\,.$$

2 body

c) Dle úlohy a) platí $t_1 = \dfrac{mv_1}{F} = 3{,}8$ s. Obdobně $t_2 = \dfrac{mv_2}{F} = 3{,}1$ s.

Dle úlohy b) platí $s_1 = \dfrac{mv_1^2}{2F} = 31$ m. Obdobně $s_2 = \dfrac{mv_2^2}{2F} = 22$ m.

3 body

d) Dle úlohy a) platí $t_1 = \dfrac{mv_1}{F} = \dfrac{mv_1}{0{,}4mg} = \dfrac{v_1}{0{,}4g} = 4{,}2$ s.

Obdobně $t_2 = \dfrac{v_2}{0{,}4g} = 3{,}5$ s.

Dle úlohy b) platí $s_1 = \dfrac{mv_1^2}{2F} = \dfrac{mv_1^2}{2\cdot 0{,}4mg} = \dfrac{v_1^2}{0{,}8g} = 35{,}4$ m.

Obdobně $s_2 = \dfrac{v_2^2}{0{,}8g} = 24{,}6$ m.

3 body

3. a) Hledaná práce je rovna přírůstku kinetické energie:

$$W = \frac{1}{2}(m_0 + 8m_1)v_2^2 - \frac{1}{2}(m_0 + 8m_1)v_1^2 = \frac{1}{2}(m_0 + 8m_1)(v_2^2 - v_1^2) = 81{,}9\ \mathrm{MJ}\,.$$

3 body

b) Tažením soupravy silou o velikosti F po dráze s vykonala lokomotiva práci

$$W' = Fs\,, \tag{1}$$

která je rovna přírůstku kinetické energie soupravy. V analogii s úlohou a) platí:

$$W' = \frac{1}{2}8m_1v_2^2 - \frac{1}{2}8m_1v_1^2 = 4m_1(v_2^2 - v_1^2)\,. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) plyne

$$F = \frac{4m_1(v_2^2 - v_1^2)}{s} = 50{,}4\ \mathrm{kN}\,. \tag{3}$$

4 body

c) Velikost zrychlení vlaku je rovna velikosti zrychlení soupravy:

$$a = \frac{F}{8m_1}\,.$$

Užitím rovnice (3) dostaneme

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = 0{,}21\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

3 body

(Velikost zrychlení lze též získat z kinematických rovnic

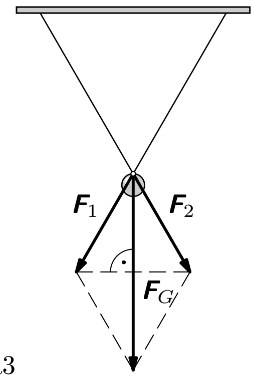
$$s = v_1t + \frac{1}{2}at^2\,, \qquad v_2 = v_1 + at$$

vyloučením času t.)

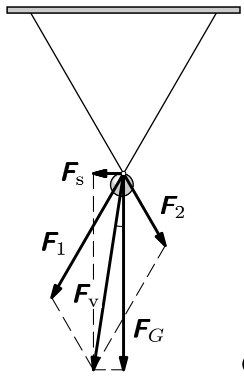
4. a) Rozložením tíhové síly do směrů vláken dostaneme rovnoběžník sil, kterým je kosočtverec s vnitřním úhlem 60°. Z obr. R3 plyne

$$F_1 = F_2 = \frac{F_G}{2\cos 30°} = \frac{mg}{\sqrt{3}} = 1{,}42\ \mathrm{N}\,.$$

2 body



Obr. R3



Obr. R4

b) Rovina trojúhelníku se vychýlí tak, že výslednice $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ tíhové síly $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ a setrvačné síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -m\boldsymbol{a}$ bude ležet v rovině určené trojúhelníkem. V rovnoběžníku sil z úlohy a) nahradíme tíhovou sílu výslednicí $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$. Tíhová a setrvačná síla jsou navzájem kolmé, pro velikost výslednice platí:

$$F_\mathrm{v} = \sqrt{F_G^2 + F_\mathrm{s}^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}\,. \qquad (1)$$

Podle úlohy a) dostaneme

$$F_1 = F_2 = \frac{F_\mathrm{v}}{2\cos 30°} = \frac{m\sqrt{g^2 + a^2}}{\sqrt{3}} = 1{,}43\ \mathrm{N}\,.$$

4 body

c) Tentokrát setrvačná síla působící na kuličku leží v rovině trojúhelníku. Tíhová a setrvačná síla jsou navzájem kolmé, pro velikost výslednice platí (1). Výslednici $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ rozložíme do směrů vláken (obr. R4). Celou konstrukci ve zvoleném měřítku provedeme a velikosti sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ změříme. Výsledek lze ověřit výpočtem pomocí sinové věty: $F_1 = 1{,}79$ N, $F_2 = 1{,}04$ N.

4 body

5. a) Označme v_1 velikost rychlosti vozíku se střelou bezprostředně po zásahu. Ze zákona zachování hybnosti během zásahu plyne:

$$mv = (M + m)v_1\,. \qquad (1)$$

Z rovnic rovnoměrně zpomaleného pohybu vozíku s nábojem, při kterém z počáteční rychlosti o velikosti v_0 zastavil na dráze d:

$$v_0 = at\,, \qquad d = \frac{1}{2}at^2\,,$$

dostaneme velikost zrychlení

$$a = \frac{v_0^2}{2d}\,. \tag{2}$$

Během zastavování po zásahu střely spotřebuje brzdící síla práci rovnou počáteční kinetické energii vozíku s nábojem:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = (m+M)a \cdot D\,. \tag{3}$$

Z rovnic (2) a (3) dostaneme

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{D}{d}}\,.$$

Dosazením do vzorce (1) dostaneme velikost rychlosti střely:

$$v = \frac{m+M}{m}v_0\sqrt{\frac{D}{d}} = 250\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

5 bodů

b) Kinetická energie střely před zásahem je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

kinetická energie vozíku s nábojem bezprostředně po zásahu je

$$E'_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(m+M)v_1^2\,.$$

Energie jsou v poměru

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{(m+M)v_1^2}{mv^2}\,.$$

Užitím rovnice (1) dostaneme konečný výsledek

$$\frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{m}{m+M} = 0{,}0032 = 0{,}32\ \%\,.$$

4 body

Výrazný pokles mechanické energie je způsoben tím, že většina kinetické energie střely (99,68 %) se přeměnila na vnitřní energii, která se projevila deformací obou těles a zvýšením teploty. Pouze 0,32 % kinetické energie střely se zachovalo ve formě kinetické energie vozíku se střelou.

1 bod

6. Výsledky měření a výpočtů pro sestavu s výškou výtokového otvoru $H = 51$ cm jsou v tabulce. Změřená délka dostřiku je vždy menší než teoretická vypočítaná podle vzorce (1). I při výšce hladiny větší než 20 cm nad výtokovým otvorem dosahuje jen asi 90 %.

h / cm	$\sqrt{h}$ /cm^{0,5}	d / cm	d_{te} / cm	$(d/d_{te})\times 100\%$
2	1,41	12	20,19	59,4
4	2,00	22	28,56	77,0
6	2,45	29	34,98	82,9
8	2,83	34	40,39	84,2
10	3,16	38	45,16	84,2
12	3,46	43	49,47	86,9
14	3,74	47	53,43	88,0
16	4,00	51	57,12	89,3
18	4,24	54	60,58	89,1
20	4,47	57	63,86	89,3
22	4,69	61	66,98	91,1
24	4,90	64	69,96	91,5

H / cm
51

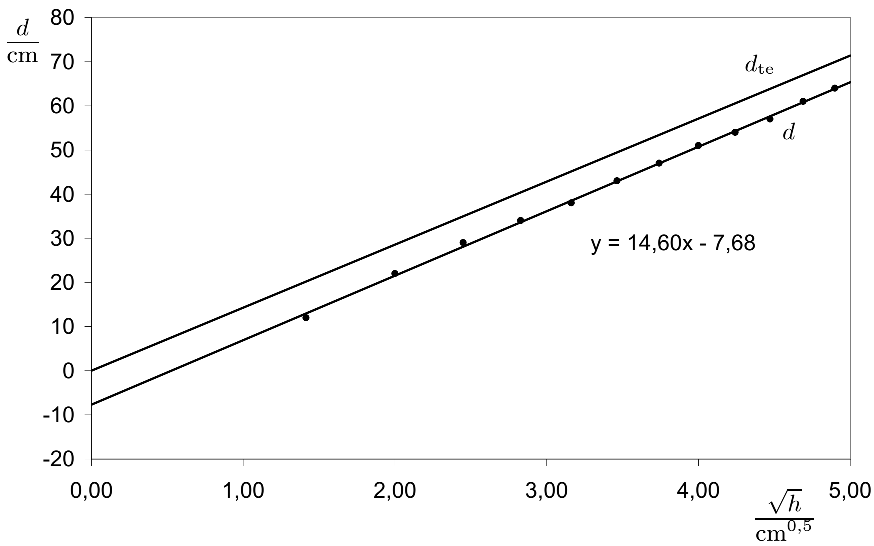
Závislost délky dostřiku d na $\sqrt{h}$ je lineární, nejedná se však o přímou úměrnost. Lineární trend určený EXCELem můžeme pro délky měřené v centimetrech přepsat na rovnici pro číselné hodnoty

$$\{d\} = 14{,}60\{\sqrt{h}\} - 7{,}68\,. \tag{2}$$

Vzorec (1) při dané výšce výtokového otvoru $H = 51$ cm vede k rovnici

$$\{d_{\mathrm{te}}\} = 14{,}3\{\sqrt{h}\}\,. \tag{3}$$

Dosazením $h = 30$ cm do (2) dostáváme $d = 72{,}3$ cm.



7. a) Pohyb ve svislém směru probíhá jako volný pád. Z rovnice

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2 \qquad \text{plyne} \qquad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}03\ \mathrm{s}\,.$$

Ve vodorovném směru se střela pohybuje rovnoměrně počáteční rychlostí o velikosti

$$v_0 = \frac{d}{t_0} = 29{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

b) Označme m hmotnost střely. V soustavě spojené se zemí označme u_1 vodorovnou souřadnici rychlosti lehčí části a u_2 vodorovnou souřadnici rychlosti těžší části po oddělení. V soustavě spojené s letící střelou označme u_1' vodorovnou souřadnici rychlosti lehčí části a u_2' vodorovnou souřadnici rychlosti těžší části po oddělení. Má-li část střely o hmotnosti $m/3$ dopadnout k patě věže, musí splňovat rovnici

$$v_0t_1 = -u_1(t_0 - t_1)\,.$$

Z rovnice dostaneme

$$u_1 = -\frac{t_1}{t_0 - t_1}v_0 = -0{,}493v_0 = -14{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Pak $u_1' = u_1 - v_0 = -44{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Ze zákona zachování hybnosti ve vztažné soustavě spojené s letící střelou plyne

$$0 = \frac{1}{3}mu_1' + \frac{2}{3}mu_2'\,.$$

Z rovnice dostaneme

$$u_2' = -\frac{1}{2}u_1' = 22{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Hledaná vzdálenost je

$$d_1 = v_0t_1 + (v_0 + u_2')(t_0 - t_1) = 135\ \mathrm{m}\,.$$

4 body

c) Otočením střely o 180° se ve vztažné soustavě spojené s letící střelou velikosti složek rychlosti zachovaly, ale jejich směr se změnil na opačný:

$$u_1' = 44{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad u_2' = -22{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Hledané vzdálenosti jsou

$$d_2 = v_0t_1 + (v_0 + u_1')(t_0 - t_1) = 180\ \mathrm{m}\,,$$
$$d_3 = v_0t_1 + (v_0 + u_2')(t_0 - t_1) = 45\ \mathrm{m}\,.$$

4 body