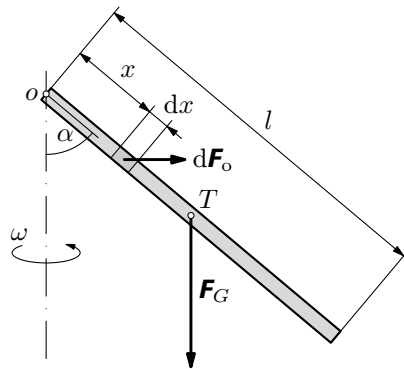


Řešení úloh celostátního kola 47. ročníku fyzikální olympiády.

Autor úloh: P. Šedivý

1. a) Úlohu budeme řešit z hlediska pozorovatele ve vztažné soustavě otáčející se spolu s vychýlenou tyčí okolo svislé osy rotoru. Určíme nejprve celkový moment odstředivých sil působících na jednotlivé části tyče vzhledem k vodorovné ose o procházející koncem tyče (obr. R1). Na elementu tyče délky dx ve vzdálenosti x od osy o působí odstředivá síla $d\mathbf{F}_o$ momentem o velikosti

$$dM = |d\mathbf{F}_o| \cdot x \cos \alpha = dm \omega^2 x \sin \alpha \cdot x \cos \alpha = \frac{dx}{l} m \omega^2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha .$$



Obr. R1

Celkový moment odstředivých sil dostaneme integrací:

$$M = \frac{m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{l} \int_0^l x^2 dx = m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{l^2}{3} = m \omega^2 \sin 2\alpha \frac{l^2}{6} . \quad (1)$$

3 body

Proti němu působí moment tíhové síly

$$M' = mg \frac{l}{2} \sin \alpha . \quad (2)$$

Pokud tyč vychýlíme jen nepatrně ze svislé rovnovážné polohy, například v důsledku chvění, které se vždy v takovéto rotující soustavě vyskytuje, můžeme psát

$$\sin \alpha \approx \alpha , \quad \sin 2\alpha \approx 2 \sin \alpha \approx 2\alpha .$$

Pak

$$M \approx \frac{m \omega^2 l^2 \alpha}{3} , \quad M' = \frac{mgl\alpha}{2} .$$

Jestliže $M < M'$, je svislá rovnovážná poloha stabilní, tyč se po malém vychýlení vrátí do svislé polohy. Jestliže $M > M'$, je svislá rovnovážná poloha labilní, tyč se

při sebemenší výchylce z rovnovážné polohy bude dále vychylovat, dokud se oba momenty nevyrovnají. Kritická úhlová rychlost ω_0 je taková, pro kterou při malé výchylce z rovnovážné polohy platí $M = M'$. Z rovnosti

$$\frac{m\omega_0^2 l^2 \alpha}{3} = \frac{mgl\alpha}{2}$$

dostaneme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

2 body

- b) Odchylku tyče od svislého směru po překročení kritické úhlové rychlosti určíme z rovnosti momentu odstředivých sil a momentu tíhové síly podle (1) a (2):

$$m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{l^2}{3} = mg \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{3g}{2\omega^2 l},$$

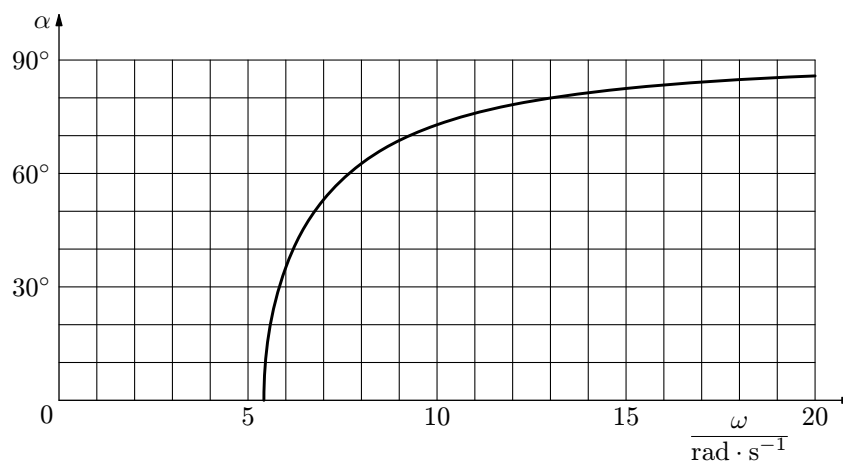
$$\alpha = \arccos \frac{3g}{2\omega^2 l}. \quad (3)$$

2 body

- c) Pro $l = 0,50$ m dostaneme $\omega_0 = 5,42$ rad \cdot s $^{-1}$.

Pomocí vztahu (3) vyplníme tabulku a sestrojíme graf (obr. R2):

$\omega/\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	5,42	6	7	8	10	12	15	20
$\cos \alpha$	1	0,8175	0,6006	0,4598	0,2943	0,2044	0,1308	0,0736
α	0°	35,2°	53,1°	62,6°	72,9°	78,2°	82,5°	85,8°



Obr. R2

Odchylky 60° dosáhneme, když

$$\frac{3g}{2\omega^2 l} = \frac{1}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 7,67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

2. a) Z rovnosti gravitační a dostředivé síly

$$\frac{\varkappa Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \quad (1)$$

odvodíme

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R}} = 7720 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\varkappa M}} = 5460 \text{ s}.$$

2 body

b) Celková mechanická energie E družice je rovna součtu energie kinetické a energie potenciální:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa Mm}{R}.$$

Z (1) odvodíme $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\varkappa Mm}{2R} = -\frac{E_p}{2}$. Pak

$$E = \frac{E_p}{2} = -E_k = -\frac{\varkappa Mm}{2R} = -\frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Celková mechanická energie družice je záporná. Pro dané hodnoty $E = -4,46 \cdot 10^9 \text{ J}$.

3 body

c) Působením odporové síly se během jednoho oběhu celková mechanická energie družice zmenší o spotřebovanou práci: $\Delta E = -F \cdot 2\pi R$. Z (2) plyne, že poloměr trajektorie se zmenší, ale rychlost družice se zvětší.

1 bod

Pro změnu rychlosti bude platit

$$-\frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2}\right) = -mv\Delta v - \frac{m(\Delta v)^2}{2} = -F \cdot 2\pi R.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$(\Delta v)^2 + 2v\Delta v - \frac{4\pi RF}{m} = 0,$$

jejímž řešením dostaneme

$$\Delta v = -v \pm \sqrt{v^2 + \frac{4\pi RF}{m}}.$$

Podle předcházející úvahy se musí velikost rychlosti družice zvětšit, vyhovovat bude pouze řešení

$$\Delta v = -v + \sqrt{v^2 + \frac{4\pi RF}{m}} = -\sqrt{\frac{\varkappa M}{R}} + \sqrt{\frac{\varkappa M}{R} + \frac{4\pi RF}{m}} = 0,273 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

Pro změnu poloměru bude platit

$$-\frac{\varkappa Mm}{2(R + \Delta R)} - \left(-\frac{\varkappa Mm}{2R}\right) = \frac{\varkappa Mm\Delta R}{2(R + \Delta R)R} = -F \cdot 2\pi R.$$

Z toho

$$\Delta R = -\frac{4\pi F R^3}{\varkappa M m + 4\pi R^2 F} = -474 \text{ m}.$$

2 body

Ke stejným výsledkům můžeme rychleji dojít pomocí aproximací:
Pro změnu rychlosti bude platit

$$-\frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2}\right) \approx -mv\Delta v = -F \cdot 2\pi R,$$
$$\Delta v = \frac{2\pi R F}{mv} = \frac{2\pi R F}{m\sqrt{\frac{\varkappa M}{R}}} = \frac{2\pi F R^{1,5}}{m\sqrt{\varkappa M}} = 0,273 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro změnu poloměru bude platit

$$-\frac{\varkappa M m}{2(R + \Delta R)} - \left(-\frac{\varkappa M m}{2R}\right) = \frac{\varkappa M m \Delta R}{2(R + \Delta R)R} \approx \frac{\varkappa M m \Delta R}{2R^2} = -F \cdot 2\pi R,$$
$$\Delta R = -\frac{4\pi F R^3}{\varkappa M m} = -474 \text{ m}.$$

3. a) Okamžité napětí na kondenzátoru kolísá jen nepatrně okolo průměrné hodnoty U_C . Po dobu trvání impulsu se kondenzátor nabíjí a jeho náboj se zvětší o

$$Q_1 = \left(\frac{U_0 - U_C}{r} - \frac{U_C}{R} \right) \tau = \left(\frac{U_0}{r} - \frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) \tau.$$

Ve zbývající části periody se vybíjí a jeho náboj se zmenší o

$$Q_2 = \left(\frac{U_C}{r} + \frac{U_C}{R} \right) (T - \tau) = \left(\frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) (T - \tau).$$

Z rovnosti $Q_1 = Q_2$ dostaneme

$$\frac{U_0}{r} \tau = \frac{U_C(R+r)}{Rr} T, \quad U_C = \frac{U_0 R}{r+R} \cdot \frac{\tau}{T}.$$

3 body

Změna napětí na kondenzátoru během trvání impulsu je

$$\Delta U = \frac{Q_1}{C} = \left(\frac{U_0}{r} - \frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) \frac{\tau}{C} = \frac{U_0 \tau}{rC} \left(1 - \frac{\tau}{T} \right).$$

Stejně velký je pokles napětí ve zbývající části periody.

3 body

- b) Dosazením do vztahu $\Delta U \ll U_C$ dostaneme $\frac{U_0 \tau}{rC} \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) \ll \frac{U_0 R}{r+R} \cdot \frac{\tau}{T}$,

$$T - \tau \ll C \cdot \frac{Rr}{R+r}.$$

2 body

- c) Pro dané hodnoty platí

$$8 \cdot 10^{-3} \text{ s} = T - \tau \ll C \cdot \frac{Rr}{R+r} = 0,18 \text{ s}.$$

Předpoklady úlohy jsou tedy splněny.

Dále vychází $U_C = 0,82 \text{ V}$, $\Delta U = 36 \text{ mV}$.

2 body

4. Řešení postupným zobrazáním na prvním a druhém rozhraní čočky
 Použijeme zobrazovací rovnici kulového rozhraní ve tvarech

$$n_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right) = n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a'} \right), \quad \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1,$$

kde $f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$, $f' = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$ jsou ohniskové vzdálenosti,

a vztah pro výpočet příčného zvětšení $\beta = -\frac{f}{a-f}$.

1. *Rovinné rozhraní:* $R \rightarrow \infty$, $n_1 \doteq 1$, $n_2 = n = 1,56$, $a_1 = v$.

Z toho $f_1 \rightarrow \infty$, $f'_1 \rightarrow \infty$.

Použijeme první tvar zobrazovací rovnice. Z něj plyne

$$a'_1 = -\frac{n_2}{n_1} a_1 = -nv = -78 \text{ mm}.$$

Příčné zvětšení obrazu vytvořeného rovinným rozhráním je $\beta_1 = 1$.

5 bodů

2. *Kulové rozhraní:* $R = -100 \text{ mm}$, $n_1 = n = 1,56$, $a_2 = -a'_1 + d = 108 \text{ mm}$, $n_2 \doteq 1$
 Použijeme druhý tvar zobrazovací rovnice.

$$f_2 = \frac{nR}{1-n} = 279 \text{ mm}, \quad f'_2 = \frac{R}{1-n} = 179 \text{ mm},$$

$$a'_2 = \frac{a_2 f'_2}{a_2 - f_2} = -113 \text{ mm}, \quad \beta_2 = -\frac{f_2}{a_2 - f_2} = 1,63.$$

Obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení $\beta = \beta_1 \beta_2 = 1,63$.

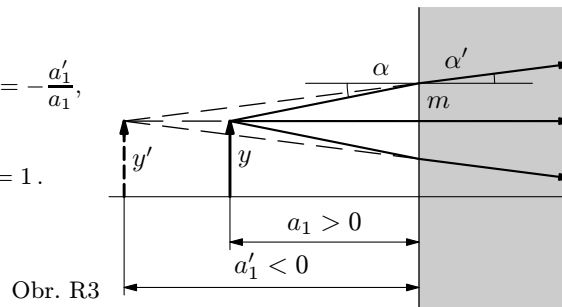
5 bodů

Jiné řešení zobrazení na rovinném rozhraní vychází z obr. R3:

Pro malé úhly platí

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \approx \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha'} = \frac{\frac{m}{a_1}}{\frac{m}{-a'_1}} = -\frac{a'_1}{a_1},$$

$$a'_1 = -na_1, \quad \beta_1 = \frac{y'}{y} = 1.$$



Obr. R3

Řešení pomocí hlavních rovin a ohniskové vzdálenosti tlusté čočky (obr. R4) – viz studijní text *Zobrazení čočkami*

Parametry čočky: $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = -100$ mm, $d = 30$ mm, $n_1 \doteq 1$ (okolní vzduch), $n_2 = n = 1,56$ (sklo)

Obecný vztah pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky

$$f = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} = \frac{n R_1 R_2}{(n - 1)[(n - 1)d + n(R_2 - R_1)]}$$

upravíme na tvar $f = \frac{n R_2}{(n - 1) \left[(n - 1) \frac{d}{R_1} + n \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right]}$.

Podobně musíme upravit vztah pro výpočet polohy hlavního bodu H :

$$a_1(H) = \frac{n_1 R_1 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \frac{R_1 d}{(n - 1)d + n(R_2 - R_1)} = \frac{d}{(n - 1) \frac{d}{R_1} + n \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right)}$$

Protože $R_1 \rightarrow \infty$ dostáváme

$$f = -\frac{R_2}{n - 1} = 179 \text{ mm}, \quad a_1(H) = -\frac{d}{n} = -19,2 \text{ mm},$$

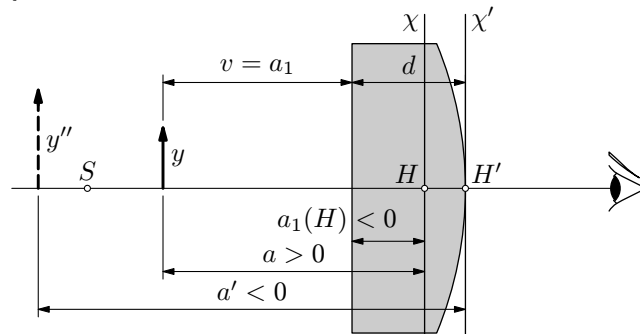
$$a'_2(H') = -\frac{n_1 d R_2}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = 0.$$

6 bodů

Pozorovaný předmět má předmětovou vzdálenost $a = a_1 - a_1(H) = 69,2$ mm.

Obrazová vzdálenost je $a' = \frac{af}{a - f} = -113$ mm = a'_2 , obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení $\beta = -\frac{f}{a - f} = 1,63$.

4 body



Obr. R4